

Координатни условия за колинеарност и компланарност

1. Пространство $\mathcal{L}$ и нека $\vec{f}, \vec{g}$ е базис на $\mathcal{L}$

Нека $\vec{a}$ е компланарен с $\mathcal{L}$

$$\exists! a_1, a_2 \in \mathbb{R} : \vec{a} = a_1 \cdot \vec{f} + a_2 \cdot \vec{g}$$

$$\vec{a}(a_1, a_2)$$

$$B = \{\vec{f}, \vec{g}\}$$

$$\vec{a}(a_1, a_2)$$

$$\vec{b}(b_1, b_2)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Детерминанта

Нека $K = O \vec{f} \vec{g}$ е афинна координатна система в $\mathcal{L}$

Нека $T.M \in \mathcal{L}$. $\overrightarrow{OM}$ - позиционен вектор на $T.M$

$$\exists! x, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{f} + y \cdot \vec{g} \rightarrow \overrightarrow{OM}(x, y)$$

$\rightarrow T.M(x, y)$ спрямо K

$$T. A_1(x_1, y_1)$$

$$T. A_2(x_2, y_2)$$

$$T. A_3(x_3, y_3)$$

A_1, A_2, A_3 са колинеарни
(лежат на 1 права)
или съвпадат

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \parallel \overrightarrow{A_1 A_3} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\overrightarrow{A_1 A_3} = \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0$$

2. Нека $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ са 1H3 в-ри в $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \exists! a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}: \vec{a} = a_1 \cdot \vec{f} + a_2 \cdot \vec{g} + a_3 \cdot \vec{h}$$

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \in \text{no. } B = \{\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\}$$

кога са колумарни:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

са колумарни

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Нека $K = O \vec{f} \vec{g} \vec{h}$ е координатна с-ма в $\mathbb{R}^3$
т. М-произволна

$$\exists! x, y, z \in \mathbb{R} : \vec{OM} = x \cdot \vec{f} + y \cdot \vec{g} + z \cdot \vec{h}$$

$$\rightarrow \vec{OM}(x, y, z) \rightarrow M(x, y, z) \text{ снр. } K$$

$$\begin{matrix} A_1(x_1, y_1, z_1) \\ A_2 \dots \\ A_3 \dots \\ A_4 \dots \end{matrix}$$

A_1, A_2, A_3 лежат на 1 права

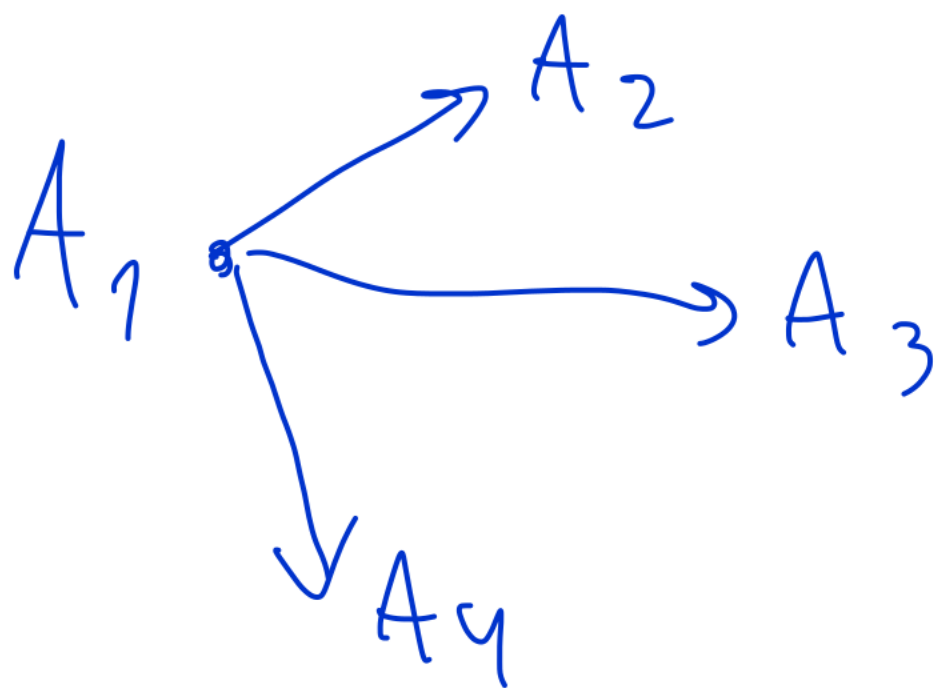
$\Leftrightarrow$

$$\vec{A_1 A_2} \parallel \vec{A_1 A_3}$$

$$\begin{matrix} \vec{A_1 A_2} (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \vec{A_1 A_3} (\dots) \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

A_1, A_2, A_3, A_4 са компланарни
(лежат в 1 равнина)



$\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}$ са
компланарни

$\Leftrightarrow$

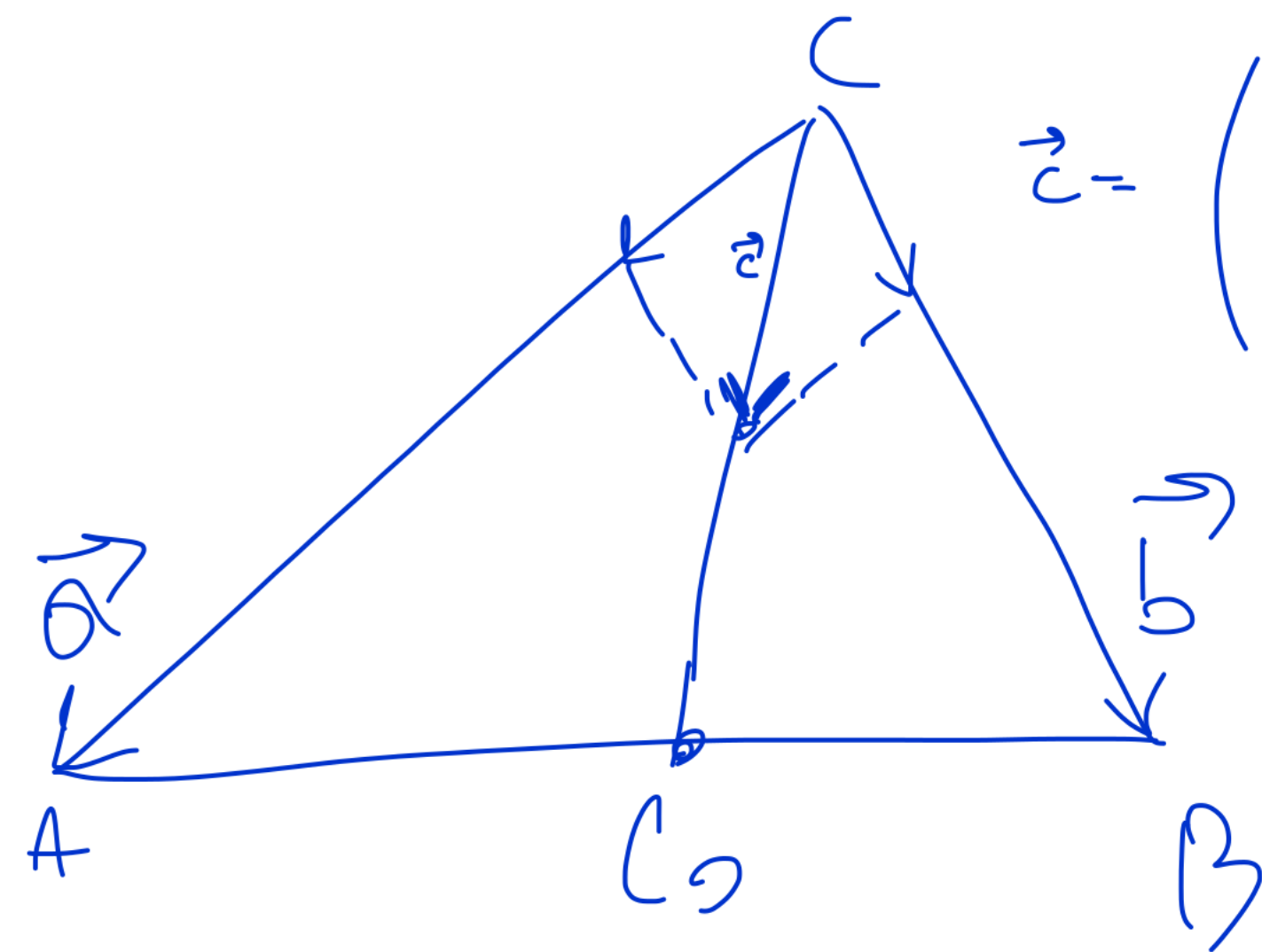
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Зад. 1. ΔABC , $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$

Нека т. $C_0 \in AB$ и CC_0 е вътрешна ъглополовяща.

Да се изрази $\vec{CC_0}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}$.

Да се докаже, че $CA:CB = AC_0:C_0B$



$$\vec{z} = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \parallel \vec{CC_0}$$

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R} : \vec{CC_0} = \lambda \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

$$AC_0 = \vec{CC_0} - \vec{CA} = \underbrace{\lambda \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)}_{-\vec{a}} = \left(\frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \frac{\lambda}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

$$\Rightarrow AC_0 \left(\frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1, \frac{\lambda}{|\vec{b}|} \right) \text{ спрямо базиса } B\{\vec{a}, \vec{b}\}$$

$$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} = -\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{AB}(-1, 1)$$

$$\text{По условие т. } C_0 \in AB \Rightarrow AC_0 \parallel AB \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1 & \frac{\lambda}{|\vec{b}|} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1\right) \cdot 1 - (-1) \frac{\lambda}{|\vec{b}|} = 0$$

$$\frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1 + \frac{\lambda}{|\vec{b}|} = 0$$

$$\lambda \left(\frac{1}{|\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{b}|} \right) = 1$$

$$\lambda = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

$$C_0 = \frac{\cancel{|\vec{a}|} |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{a}}{\cancel{|\vec{a}|}} + \frac{|\vec{a}| \cancel{|\vec{b}|}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{\cancel{|\vec{b}|}}$$

$$\Rightarrow AC_0 \left(\frac{2}{|\vec{a}|} - 1, \frac{2}{|\vec{b}|} \right) \text{ on } B \{ \vec{a}, \vec{b} \}$$

$$AC_0 \left(\underbrace{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} - 1}_{\frac{-|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}}, \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \right)$$

$$\vec{AB} (-1, 1)$$

$$|\vec{AC_0}| : |\vec{AB}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

$$|\vec{AC_0}| : |\vec{CB}| = |\vec{a}| : |\vec{b}| = CA : CB$$

2. на чАС

Зад. Если $ABCD$ - тетраэдр (тригональная пирамида)

Т. М. - presso un AB

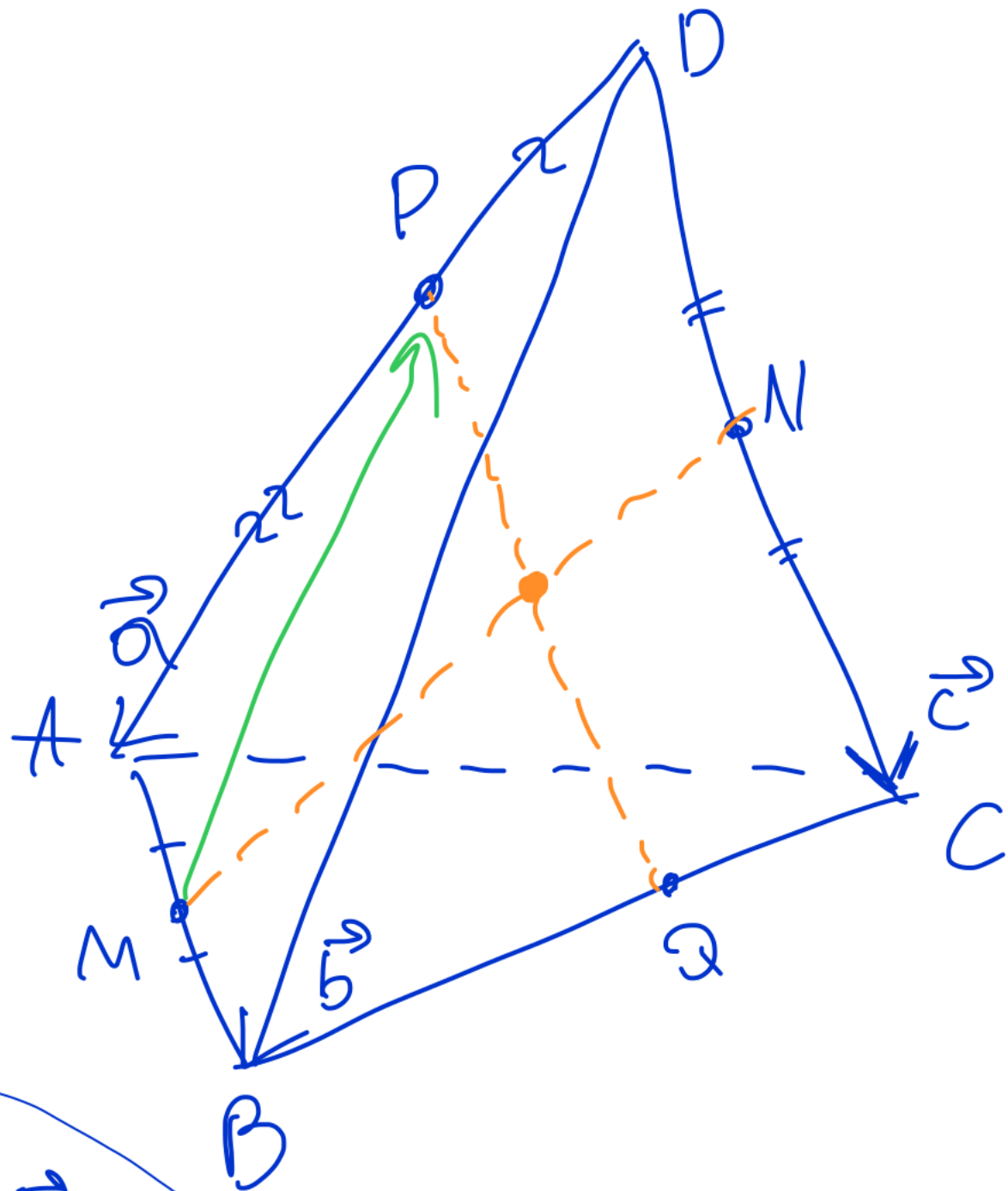
T.N - средна на $\mathbb{C}$

T.P. $\triangle AD$: $AP:AD = 2:3$

T.Q $\in$ BC

Пробите MN и PQ се
песичат.

Намерете BQ:BC (= ?)



Решение: Возмем $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$

По условию $1. Q \in BC \Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\underline{\vec{MP}} = \vec{DP} - \vec{DM} = \frac{1}{3} \vec{DA} - \frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{DB}) = \boxed{\text{Равнина } c}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \left(-\frac{1}{2} \right) \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

$$\vec{MN} = \vec{DN} - \vec{DM} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{MQ} &= \vec{DQ} - \vec{DM} = (\vec{DB} + \underline{\underline{13Q}}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= (\vec{b} + 2(\vec{c} - \vec{b})) - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} =\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(1-\lambda-\frac{1}{2}\right)\vec{b} + \lambda\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{MQ} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\lambda, \lambda\right)$$

По условие MN и PQ се пресичат

$\Rightarrow M, N, P, Q$ лежат в 1 равнина

$\Rightarrow$

$\vec{MP}, \vec{MN}, \vec{MQ}$ са компланарни

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 = \cancel{\frac{\lambda}{12}} + \frac{1}{8} + 0 - 0 - \frac{\lambda}{4} + \cancel{\frac{1}{24} - \frac{\lambda}{12}}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{\lambda}{4} = 0$$

$$2 - 3\lambda = 0$$

$$\text{Отт: } \lambda = \frac{2}{3} \checkmark$$

Зад. 2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - паралелепипед произволен

τ - M - среда на BC

Правда l минава през τ - M , пресича

AC_1 в τ - N и DD_1 в τ - P

Измерете $MN:MP=? (= \lambda)$

Първо избиране базиси

(за пресмятане са са с 1 осигва)

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$$

$$\tau \cdot N \in AC_1 \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}:$$

$$\overrightarrow{AN} = x \cdot \overrightarrow{AC_1} = x \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\tau \cdot P \in DD_1 \Rightarrow \exists! y \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{DP} = y \cdot \overrightarrow{DD_1} = y \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \left(\vec{a} + \vec{b} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= (x-1)\vec{a} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + x\vec{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} (x-1, x-\frac{1}{2}, x)$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DP}) - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \cdot \frac{1}{2}) = \\ &= \overrightarrow{b} + \gamma \cdot \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} - \frac{1}{2} \overrightarrow{b} = -1 \cdot \overrightarrow{a} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{b} + \gamma \cdot \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP}(-1, \frac{1}{2}, \gamma)$$

По условие точките M, N, P лежат на 1 права

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{MP}$ са колинеарни

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & x \\ -1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Или търсим само x
или γ , за да си
намерим отношението

$$(x-1)\frac{1}{2} + (x-\frac{1}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad x = \frac{2}{3}$$

$$|\overrightarrow{MN}| : |\overrightarrow{MP}| = \frac{x-1}{-1} = -\frac{1}{3} : -1 \quad \text{отг: } \frac{1}{3}$$